



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Факультет математики и компьютерных наук
Кафедра математического анализа



«Утверждаю»
Проректор по научной работе и
инновациям
Н.А. Ашурбеков
» _____ 2021 г.

Рабочая программа дисциплины

«Мера и различные виды интегралов»

по направлению подготовки *02.06.01 Компьютерные и информационные науки*

Уровень образования: *подготовка кадров высшей квалификации (аспирантура)*

Квалификация (степень) выпускника:

«Исследователь. Преподаватель-исследователь»

Статус дисциплины: *вариативная часть обязательных дисциплин*

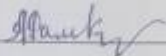
Махачкала, 2021

Рабочая программа дисциплины *Мера и различные виды интегралов* составлена в 2021 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 02.06.01 Компьютерные и информационные науки, квалификация выпускника: «Исследователь. Преподаватель-исследователь» от 30 июля 2014 г. № 869.

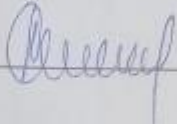
Разработчики: кафедра математического анализа,
Рамазанов А.-Р.К., д.ф.-м.н, профессор

Рабочая программа дисциплины одобрена:

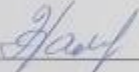
на заседании кафедры от 23 04 2021 г., протокол № 8.

Зав. кафедрой  Рамазанов А.-Р.К.

на заседании Методической комиссии факультета математики и компьютерных наук от 23 04 2021 г., протокол № 8

Председатель  Бейбалаев В.Д.

Рабочая программа дисциплины согласована
с Управлением аспирантуры и докторантуры

«26» апреля 2021 г.  Рамазанова Э.Т.

Аннотация

Дисциплина *Мера и различные виды интегралов* входит в вариативную часть блока 1 подготовки аспирантов по направлению 02.06.01 Компьютерные и информационные науки.

Дисциплина реализуется на факультете математики и компьютерных наук кафедрой математического анализа.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с теорией меры и теорией интеграла и их приложений в различных областях математики и естественнонаучных дисциплин.

Дисциплина нацелена на формирование следующих компетенций выпускника:
 универсальных – УК-1;
 общепрофессиональных – ОПК-1, ОПК-2;
 профессиональных – ПК-1.

Преподавание дисциплины предусматривает проведение следующих видов учебных занятий: *лекции, практические занятия, самостоятельная работа.*

Рабочая программа дисциплины предусматривает проведение текущего контроля успеваемости в форме коллоквиума и контрольных работ и промежуточного контроля в форме зачета.

1. Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям обучающегося в аспирантуре по направлению подготовки кадров высшей квалификации и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, и обучающихся направления подготовки 02.06.01–Компьютерные и информационные науки, изучающих дисциплину *Мера и различные виды интегралов.*

Программа разработана в соответствии с:

- Федеральным государственным образовательным стандартом ФГОС ВО по направлению 02.06.01 Компьютерные и информационные науки утвержденным приказом министерства образования и науки Российской Федерации *от 30 июля 2014 г. N 864* ;
- Образовательной программой 02.06.01 Компьютерные и информационные науки;
- Учебным планом университета по направлению подготовки 02.06.01 Компьютерные и информационные науки , утвержденным в 2020г.

Объем дисциплины 2 зачетные единицы, в том числе в академических часах по видам учебных занятий:

Курс	Учебные занятия					Форма промежуточной аттестации	
	Все го	в том числе					
		Контактная работа обучающихся с преподавателем					СРС
		из них					
Лекции	Лабораторные занятия	Практические занятия	КСР	консультации			

2	72	12		6		54	зачет
---	----	----	--	---	--	----	-------

1. Цели освоения дисциплины

- Более углубленное изучение теории меры и теории интеграла, освоение приложений меры и интеграла в различных областях математики и естественнонаучных дисциплин.
- Творческое овладение основными методами интегрального исчисления.

2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре

В результате освоения программы подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине (модулю):

Коды компетенции	Результаты освоения ОПОП <i>Содержание компетенций*</i>	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине
УК-1	способность к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях	Знать: общие вопросы теории меры и интеграла, различные виды мер и интегралов. Уметь: давать сравнительный анализ разных мер и интегралов, находить их сходственные черты, применять их при решении исследовательских и практических задач в различных областях математики. Владеть навыками подбора подходящего вида меры или интеграла для адекватного применения в той или иной области математики или естественнонаучных дисциплин.
ОПК-1	способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий	Знать фундаментальные свойства различных мер и различных интегралов. Уметь давать оценки мер различных множеств и различных интегралов, в частности, с использованием квадратурных формул, с использованием информационно-коммуникационных технологий. Владеть навыками оценки мер и интегралов, методами исследования сходимости различных интегралов.
ОПК-2	готовность к преподавательской деятельности по основным образовательным программам высшего образования	Знать на достаточно высоком уровне курс математики по основным образовательным программам данной образовательной организации. Уметь: оценивать объем материала, необходимого для освоения того или иного программного вопроса;

		устанавливать связи между различными предметными разделами с учетом специфики математики. Владеть методикой изложения основного материала того или другого раздела математики по программе данной образовательной организации.
ПК-1	способность выполнять математическое моделирование объектов и процессов с целью анализа и оптимизации их параметров с использованием имеющихся средств исследований, включая стандартные пакеты прикладных программ	Знать: различные виды мер, меры различной размерности; различные виды интегралов по различным областям; различные типы квадратурных формул; различные виды сходимости последовательностей функций и условия их сходимости. Уметь: создавать модели объектов, явлений, процессов и конструкций в форме функционально-интегральной зависимости, некоторого интеграла того или иного вида с целью анализа и оптимизации их параметров с использованием стандартных пакетов прикладных программ и других средств исследований. Владеть методами моделирования естественнонаучных задач в форме некоторого интеграла или функционально-интегральной зависимости.

В результате изучения дисциплины обучающийся осваивает следующие компетенции:

Компетенция	Код по ФГОС	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
универсальные	УК-1	Использует современные научные достижения в области теории меры и интеграла в научной работе	Лекции, самостоятельная работа
общефессиональные	ОПК-1	Демонстрирует умение самостоятельно применять методы современного математического анализа в своей научной работе	Лекция, самостоятельное изучение научной литературы
	ОПК-2	Демонстрирует готовность преподавать в вузе	Посещение занятий опытных

Компетенция	Код по ФГОС	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
		дисциплины, тесно связанные с теорией меры и интеграла	преподавателей, изучение методической литературы
профессиональные	ПК-1	Владеет методами моделирования естественнонаучных задач в форме некоторого интеграла или функционально-интегральной зависимости с использованием стандартных пакетов прикладных пакетов	Самостоятельная работа, участие с докладами на конференциях

3. Место дисциплины в структуре ОПОП

Изучение дисциплины *Мера и различные виды интеграла* предполагает хорошее знание основных разделов математического анализа, функционального анализа, комплексного анализа, линейной алгебры.

Знания по данной дисциплине необходимы при работе над диссертацией и в дальнейшей научно-исследовательской работе по выбранному направлению.

4.1. Объем дисциплины составляет 2 зачетные единицы, 72 академических часа.

4.2. Структура дисциплины

Названия разделов и тем дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Аудиторные занятия, в том числе				Самостоят. работа	Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации
			лекции	практ. занятия	лабор. работы	Контр. сам.		
Модуль 1. Измеримые множества и функции								
Всего по модулю 1	3		6	3			27	коллоквиум, контрольная работа
1. Различные виды меры множества			2	1			9	
2. Измеримые функции.			2	1			9	
3. Интегралы Римана и Лебега			2	1			9	
Модуль 2. Интегралы Стильбеса								
Всего по модулю 2	3		6	3			27	коллоквиум, контрольная работа

1. Функции конечной вариации			1				7	
2. Интеграл Римана-Стилтьеса			2	1			7	
3. Абсолютно непрерывные функции			1				7	
4. Интеграл Лебега-Стилтьеса			2	2			6	
ИТОГО	3		12	6			54	зачет

4.3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (*разделам*)

ЛЕКЦИИ

Модуль 1. Измеримые множества и функции

Тема 1. Различные виды меры множества

Сравнение множеств по мощности и по мере. Мера Жордана и мера Лебега. Их свойства.

Тема 2. Измеримые функции

Измеримые функции, их свойства. Различные виды сходимости функциональных последовательностей.

Тема 3. Интегралы Римана и Лебега

Собственный и несобственный интегралы Римана. Их свойства.

Различные определения интеграла по Лебегу

Интеграл от ограниченной измеримой функции.

Суммируемые функции.

Сравнительный анализ условий существования и различных свойств интегралов Лебега и Римана.

Модуль 2. Интегралы Стильеса

Тема 6. Функции конечной вариации

Монотонные функции, их дифференциальные свойства. Функции конечной вариации, их свойства. Связь с монотонными функциями.

Тема 7. Интеграл Римана-Стилтьеса

Определение, свойства и вычисление интеграла Римана-Стилтьеса.

Тема 8. Абсолютно непрерывные функции

Определение и свойства абсолютно непрерывных функций. Восстановление функции по ее производной.

Тема 9. Интеграл Лебега-Стилтьеса

Мера Лебега-Стилтьеса. Интеграл Лебега-Стилтьеса, некоторые свойства.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

Модуль 1. Измеримые множества и функции

Тема 1. Различные виды меры множества

Структура линейных множеств. Канторовы совершенные множества. Счетные и несчетные множества, их свойства. Измеримые по Лебегу множества. Вычисление мер некоторых линейных множеств.

Тема 2. Измеримые функции

Измеримые функции, их свойства. Различные виды сходимости функциональных последовательностей.

Классы измеримых функций.

Тема 3. Интегралы Римана и Лебега

Собственный и несобственный интегралы Римана. Исследование интегралов на сходимость. Оценки интегралов.

Различные определения интеграла по Лебегу

Интеграл от ограниченной измеримой функции.

Суммируемые функции.

Модуль 2. Интегралы Стильеса

Тема 5. Построение интеграла Римана-Стилтьеса

Методы вычисления интеграла Римана-Стилтьеса.

Тема 6. Построение интеграла Лебега-Стилтьеса

Оценки интеграла Лебега-Стилтьеса. Сведение к интегралу Лебега.

5. Оценочные средства для текущего контроля и аттестации обучающегося

Тематика заданий текущего контроля

Примерный перечень вопросов к коллоквиуму

1. Монотонные функции.
2. Дифференцирование монотонных функций.
3. Функции ограниченной вариации.
4. Свойства функций ограниченной вариации.
5. Классы функций ограниченной вариации.
6. Непрерывные функции ограниченной вариации.
7. Представление функции ограниченной вариации в виде разности двух монотонных функций.
8. Абсолютно непрерывные функции.
9. Сингулярные функции.
10. Интеграл Римана-Стилтьеса и его свойства.
11. Существование интеграла Стильеса.
12. Интегрирование по частям в интеграле Стильеса.
13. Вычисление интеграла Стильеса.
14. Приложения интеграла Стильеса в механике.
15. Спрямоугольные кривые. Криволинейные интегралы 2 рода.
16. Мера Лебега-Стилтьеса.
17. Интеграл Лебега-Стилтьеса.
18. Системы функций Чебышева и их свойства.
19. Системы функций Маркова и их свойства.
20. Представление систем Маркова при помощи интеграла Стильеса.

Примерные контрольные работы

№1

1. Доказать, что если $f(x)$ - монотонная функция, удовлетворяющая равенству $f(x) + f(y) = f(x + y)$ для всех x, y и $f(1) = a$, то $f(x) = ax$.
2. Найти вариацию функции на $[0, 2]$, если $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{при } x < 1, \\ 10 & \text{при } x = 1, \\ x^2 & \text{при } x > 1. \end{cases}$

3. Доказать, что функция $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = 0, \\ x \sin \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0. \end{cases}$ имеет неограниченную вариацию на $\left[0, \frac{2}{\pi}\right]$.
4. Доказать, что если $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица на $[a, b]$, то она имеет ограниченную вариацию.
5. Представить функцию $f(x) = \cos x$ на $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ в виде разности двух монотонных функций.

№2

1. Вывести формулу интегрирования по частям для интеграла Стильеса.
2. Вычислить $\int_0^3 x^3 df(x)$, где $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 3 & \text{при } 1 < x < 2, \\ -4 & \text{при } 2 \leq x < 3, \\ 2 & \text{при } x = 3. \end{cases}$
3. Вычислить $\int_{-1}^4 x^2 df(x)$, где $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } -1 \leq x < 0, \\ 10 & \text{при } x = 0, \\ \sin x & \text{при } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 2 - x & \text{при } x = \frac{\pi}{2}, \\ x^2 - 4 & \text{при } \frac{\pi}{2} < x < 4, \\ 3 & \text{при } x = 4. \end{cases}$
4. Доказать, что кривая $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = 0, \\ x \sin \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0. \end{cases}$ неспрямляема на $[0, 1]$.
5. Вычислить интеграл Лебега-Стилтьеса $\int_0^1 f(x) d(x^3)$, если $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{для иррациональных чисел, больших, чем } \frac{1}{3}, \\ x^3 & \text{для иррациональных чисел, меньших, чем } \frac{1}{3}, \\ 0 & \text{в рациональных точках.} \end{cases}$

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

6.1. Основная литература

1. [Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа](#) - Москва: Физматлит, 2012
Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. - 7-е изд. - Москва : Физматлит, 2012. - 573 с. - (Классический университетский учебник). - ISBN 978-5-9221-0266-7 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82563> ().
2. [Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной: учебное пособие](#) - Москва: Наука, 1974
Натансон, И.П. Теория функций вещественной переменной : учебное пособие / И.П. Натансон. - Изд. 3-е. - Москва : Наука, 1974. - 480 с. : ил. ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=459802> ().
3. [Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. 3](#) - Москва: Физматлит, 2002
Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3-х т. / Г.М. Фихтенгольц ; ред. А.А. Флоринского. - Изд. 6-е. (1-е изд. - 1949 г.). - Москва : Физматлит, 2002. - Т. 3. - 727 с. - ISBN 5-9221-0155-2 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=83196> ().

6.2. Дополнительная литература

1. [Действительный анализ в задачах: учебное пособие](#) - Москва: Физматлит, 2005
Действительный анализ в задачах : учебное пособие / П.Л. Ульянов, А.Н. Бахвалов, М.И. Дьяченко и др. - Москва : Физматлит, 2005. - 416 с. - ISBN 5-9221-0595-7 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=69331> ().
2. [Карлин С., Стадден В. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике](#) - Москва: Наука, 1976
Карлин, С. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике / С. Карлин, В. Стадден ; пер. с англ. под ред. С.М. Ермакова. - Москва : Наука, 1976. - 568 с. ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=459751> ().
3. Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г. Мера и интеграл Лебега в курсе математического анализа. М.: ИПЦ ДГУ, 2010.

6.3. Программное обеспечение

Для успешного освоения дисциплины, обучающийся использует следующие программные средства: различные пакеты прикладных программ (Mathcad, Matlab и др.), а также интернет-ресурсы.

6.4. Базы данных, информационно-справочные и поисковые системы

1. Ресурс периодических изданий России [Электронный ресурс]: <http://www.ebiblioteka.ru>.
2. Российский образовательный форум [Электронный ресурс]: <http://www.schoolexp.ru>.

3. ВикиЗнание: гипертекстовая электронная энциклопедия [Электронный ресурс]: <http://www.wikiznanie.ru>.
4. Википедия: свободная многоязычная энциклопедия [Электронный ресурс]: <http://ru.wikipedia.org>.
5. Педагогический энциклопедический словарь [Электронный ресурс]: <http://dictionary.fio.ru>.
6. Инновационная образовательная сеть «Эврика» – [Электронный ресурс]: <http://www.eurekanet.ru>.
7. Центр дистанционного образования «Эйдос» – [Электронный ресурс]: <http://www.eidos.ru>.
8. Библиотека Магистра (ИНТЕРНЕТ-ИЗДАТЕЛЬСТВО) Электронные издания произведений и биографических и критических материалов [Электронный ресурс]: <http://www.magister.msk.ru/library/>.
9. Виртуальный педагогический институт: электронный портал для магистрантов. Режим доступа: [Электронный ресурс]: <http://edu.emissia.org/>.
10. Электронно-библиотечные системы (ЭБС), базы данных, информационно-справочные и поисковые системы [Электронный ресурс]: Фундаментальная библиотека РГПУ им. А.И. Герцена. Адрес сайта: <http://lib.herzen.spb.ru>.
11. Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU. Адрес сайта: <http://elibrary.ru/defaultx.asp>.
12. Электронно-библиотечная система IPRbooks. – [Электронный ресурс]: <http://www.iprbookshop.ru>.
13. <http://www.science-education.ru/101-5082> — Электронный научный журнал «Современные проблемы науки и образования».
14. <http://www.pmedu.ru/index.php?category=5> — Журнал «Проблемы современного образования».
15. Словари и энциклопедии на Академике // Академик. – Режим доступа: <http://dic.academic.ru/>

6.5. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. Федеральный портал российское образование <http://edu.ru>;
2. Электронные каталоги Научной библиотеки Даггосуниверситета <http://elib.dgu.ru/?q=node/256>;
3. Образовательные ресурсы сети Интернет <http://catalog.iot.ru/index.php>;
4. Электронная библиотека <http://elib.kuzstu.ru>.

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Учебные аудитории для проведения лекционных занятий и дисплейные классы факультета с современными компьютерами, к которым имеется необходимое программное обеспечение.

8. Образовательные технологии

При реализации различных видов учебной работы используются лекционные и практические занятия, беседы, самостоятельная работа в дисплейном классе с необходимым программным обеспечением.